

## МАТЕМАТИКА 2

### Први колоквијум (19.4.2008) - Група 5

1. Испитати непрекидност функције  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  у тачки  $(0,0)$  ако је

$$a) f(x,y) = \begin{cases} \frac{x+y^3}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0); \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}; \quad b) f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0); \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

Решење: а) Из  $f(0,0) = 0$  и  $f(x,0) = \frac{1}{x} \rightarrow +\infty$  када  $x \rightarrow 0_+$  (или  $f(x,\sqrt{x}) \rightarrow 1$  када  $x \rightarrow 0_+$ ) следи да функција  $f$  у тачки  $(0,0)$  **има прекид**, односно **није непрекидна**.

б) Из неједнакости

$$|f(x,y)| \leq \frac{|x|^3}{x^2+y^2} + \frac{|y|^3}{x^2+y^2} = \frac{x^2}{x^2+y^2}|x| + \frac{y^2}{x^2+y^2}|y| \leq |x| + |y|$$

следи  $|f(x,y)| \rightarrow 0$  када  $(x,y) \rightarrow (0,0)$ , а то значи да и  $f(x,y) \rightarrow 0$  када  $(x,y) \rightarrow (0,0)$ . Како је  $f(0,0) = 0$ , функција  $f$  **је непрекидна** у тачки  $(0,0)$ .

2. Одредити локалне екстремуме функције  $f: (x,y) \mapsto z$  дефинисане имплицитно са

$$z^3 + xyz + x^2 + 2y^2 + 8 = 0.$$

Решење: Ако је  $F(x,y,z) = z^3 + xyz + x^2 + 2y^2 + 8$ , тада је

$$z'_x = -\frac{F'_x}{F'_z} = -\frac{yz+2x}{3z^2+xy}, \quad z'_y = -\frac{F'_y}{F'_z} = -\frac{xz+4y}{3z^2+xy}.$$

Стационарне тачке добијамо решавањем система

$$2x + zy = 0, \quad zx + 4y = 0, \quad F(x,y,z) = 0.$$

1. Ако је  $z^2 \neq 8$ , прве две једначине имају тривијално решење (по  $x$  и  $y$ ), при чему из треће једначине ( $F = 0$ ) добијамо  $z = -2$ . У том случају имамо стационарну тачку  $A(0,0)$  за коју је  $z(A) = -2$ .

2. Ако је  $z^2 = 8$ , односно  $z = 2\sqrt{2}$  или  $z = -2\sqrt{2}$ , систем нема решења.

Према томе, једина стационарна тачка је  $A(0,0)$ . Налажењем парцијалних извода другог реда добијамо  $z''_{x^2}(A) = -\frac{1}{6}$ ,  $z''_{xy}(A) = \frac{1}{6}$  и  $z''_{y^2}(A) = -\frac{1}{3}$ . Како је

$$z''_{x^2}(A) \cdot z''_{y^2}(A) - (z''_{xy}(A))^2 > 0, \quad z''_{x^2}(A) < 0,$$

то је  **$f_{\max} = f(A) = -2$** .

3. Дати су функција  $f: R^2 \rightarrow R$  и скуп  $\mathcal{D} \subset R^2$  са

$$f(x, y) = 2(x + 2)^2 + 3(y - 1)^2 + 1, \quad \mathcal{D} = \{(x, y) : 0 \leq y \leq x + 4, x \leq 0\}.$$

Одредити најмању и највећу вредност функције  $f$  на скупу  $\mathcal{D}$ .

*Прво решење:* Функција  $f$  има најмању вредност 1 и то у тачки  $A(-2, 1)$ . Из  $A \in \mathcal{D}$  следи да је  $\min_{\mathcal{D}} f(x, y) = f(A) = 1$ .

Како је скуп  $\mathcal{D}$  је троугао са теменима  $E(-4, 0)$ ,  $F(0, 4)$  и  $G(0, 0)$  и како је график функције  $f$  параболоид (елиптички) са теменом у тачки  $A$ , највећа вредност функције на скупу  $\mathcal{D}$  је у некој од тачака  $E$ ,  $F$  или  $G$ . Пошто је  $f(E) = f(G) = 12$  и  $f(F) = 36$ , то је  $\max_{\mathcal{D}} f(x, y) = f(F) = 36$ .

*Друго решење:* Како је  $f'_x = 4(x + 2)$  и  $f'_y = 6(y - 1)$ , тачка  $A$  је једина стационарна тачка функције  $f$  и она припада скупу  $\mathcal{D}$ . Функције  $f(0, y)$ ,  $f(x, 0)$  и  $f(x, x + 4)$  (које одређују границу скупа  $\mathcal{D}$ ) имају стационарне тачке  $B(0, 1)$ ,  $C(-2, 0)$  и  $D(-13/5, 7/5)$ , при чему је  $f(B) = 9$ ,  $f(C) = 4$  и  $f(D) = 11/5$ . Упоредјујући вредности функције  $f$  у тачкама  $A, B, C, D, E, F, G$  видимо да је

$$\min_{\mathcal{D}} f(x, y) = f(A) = 1, \quad \max_{\mathcal{D}} f(x, y) = f(F) = 36.$$

Драган Ђорић